COPPA GALILEO 2013

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
  $\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{7} = 2,6458$ $\pi = 3,1416$.

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista). La scelta deve essere effettuata consegnando l'apposito cartellino al tavolo della giuria.
- **30 minuti dall'inizio**: termine ultimo per fare domande sul testo. Le domande devono essere rivolte solo dai capitani al tavolo delle domande.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

([1]) In ogni problema, a fianco del titolo, compare il nome dell'autore del testo.

8 marzo 2013

Coppa Galileo – Testi dei problemi

1. Un'altra canzone di ghiaccio e fuoco (Giuseppe Rosolini)
I sette dei degli Andali si incontrano per prevedere chi uscirà vincitore dalla guerra tra i cinque re che si sta per sviluppare. Ad ogni incontro dei sette dei, esattamente uno tra loro dice il vero, gli altri sei dicono il falso.
Il primo, il Padre, dice: "Vincerà re Ceelvyer Lannister."
Il secondo, la Madre, dice: "Vincerà re Lewyj Stark."
Il terzo, il Fabbro, dice: "Vincerà re Beapys Baratheon."
Il quarto, la Vecchia, dice: "Vincerà re Ceelvyer Lannister."
Il quinto, la Vergine, dice: "Vincerà re Munry Baratheon."
Il sesto, il Guerriero, dice: "Vincerà re Beapys Baratheon."
Il settimo, lo Straniero, dice: "Vincerà re Munry Baratheon."
Nessuno dei sette dei menziona il quinto re Unton Greyjoy. Qual è il numero totale delle lettere del nome e del cognome del vincitore?

2. Origami a Capo Tempesta (Giuseppe Rosolini)
Nel suo castello a Capo Tempesta, progettando la guerra contro gli altri quattro re, Munry Baratheon si diletta a piegare fogli a metà, cioè piega un foglio a quattro bordi in modo da dividere a metà due bordi opposti e facendo combaciare gli altri due. Prende un foglio che non è un quadrato; dopo averlo piegato due volte a metà, si accorge di aver ottenuto un quadrato di area $36\,\mathrm{cm}^2$. Munry si accorge che quella è l'area massima che poteva ottenere piegando a metà il foglio iniziale due volte. Pensa allora a come piegare a metà due volte il foglio iniziale in modo da ottenere il perimetro massimo possibile. Quanti cm è lungo quel perimetro?

3. Codici ad Approdo del Re (Matteo Musso)
L'accesso alla porta principale di Approdo del Re è controllato da un codice a cinque cifre che cambia ogni giorno. Il re Ceelvyer Lannister ha deciso che, per non sforzare troppo il cervello su inezie simili, il codice sia sempre composto usando esattamente due sequenze di due diverse cifre, ad esempio 44333 e 07777, ma non 43334 e neppure 77707. La Mano del Re protesta dicendo che la frazione p/q ottenuta dividendo il numero totale dei codici proposti da Ceelvyer Lannister per il numero di tutti i possibili codici di cinque cifre è minuscola e questo genererà inutili rischi per la sicurezza della città. Ma Ceelvyer Lannister dice alla Mano di non preoccuparsi e, presa la frazione p/q con p e q primi fra loro, calcola la differenza $q-p$ e mostra alla Mano che non è piccola. Che numero ha calcolato Ceelvyer Lannister?

4. La pista dei draghi (Alessandro Logar)
I giovani draghi spiccano il volo da un campo a forma di trapezio di area $165\,\mathrm{m}^2$. La base maggiore misura $16\,\mathrm{m}$, l'altezza $15\,\mathrm{m}$. Crescendo i draghi hanno bisogno di un campo di volo più ampio: vengono perciò prolungati i lati obliqui del trapezio fino a che si incontrano a formare un triangolo (con base la base maggiore del precedente campo trapezioidale). Quanto è l'area del nuovo campo di volo esteso?

5. Ceelvyer onomale (Matteo Musso)

Ceelvyer, che fa parte della ricchissima Casa Lannister, valuta i nomi propri di persona in un modo leggermente inusuale. Classifica infatti le 21 lettere maiuscole dell'alfabeto italiano in base ad un loro carattere topologico: il numero di buchi della loro scrittura stampata. La lettera B vale 2, le lettere ADOPQR valgono 1 ciascuna, tutte le altre valgono 0. Quindi valuta il valore di un nome come somma dei valori delle lettere componenti. Dopo un'attenta analisi, decide di chiamare il suo quarto figlio con il nome di PDOR dopo aver preso in considerazione tutte le liste di quattro lettere (anche di sole consonanti) e con quello stesso valore. Quante sono le liste di quattro lettere con lo stesso valore di PDOR che Ceelvyer Lannister ha escluso?

6. Araldica di Westeros (Giuseppe Rosolini)

Lo stemma araldico scelto da Brienne Tarth è appeso ad una parete: è una croce verde su sfondo bianco. Lo stemma è di forma quadrata. I due bracci della croce sono parallelogrammi tutti contenuti nel quadrato. Di ciascun parallelogrammo, due lati giacciono sui due lati orizzontali del quadrato e due dei quattro vertici coincidono con due vertici diagonalmente opposti del quadrato. Ogni lato dello stemma quadrato è lungo 60 cm. Ogni lato orizzontale dei due parallelogrammi è lungo 15 cm. Quanto misura la superficie bianca dello stemma in cm^2?

7. Calcoli alla Barriera (Alessandro Logar)

Per passare il tempo presso la Barriera, i Guardiani della Notte fanno calcoli lunghissimi per mantenere il cervello riscaldato. Ad esempio, Sam scrive numeri in sequenza e somma la sequenza ottenuta. Oggi scrive righe di ventuno numeri: nella prima riga scrive due 1, poi 2, 3, ecc. fino a 20; nella seconda riga scrive 1, poi due 2, quindi 3, 4, ecc. fino a 20; nella terza riga, scrive 1, 2, due 3, poi 4, 5, ecc. fino a 20; e continua così fino a scrivere una riga con 1, 2, ecc. fino a 19, finendo con due 20. Infine somma tutti i numeri scritti. Che risultato ottiene?

8. Attraverso il tunnel (Matteo Musso)

La sezione verticale del tunnel nella Barriera a Castello Nero ha forma di trapezio con basi di 6.26 m e 76.82 m. In alcuni punti del tunnel, per assicurare stabilità, è montata una trave di sostegno, parallela alle basi, che divide la sezione verticale del tunnel in due trapezi equivalenti. Quanto è lunga una di queste travi di sostegno in cm?

9. Calcoli alla Barriera, II (Alessandro Logar)

Il 997° comandante dei Guardiani della Notte utilizza funzioni per impostare calcoli che gli riscaldino il cervello. Per x e y numeri interi positivi, scrive $\text{qu}(x, y)$ per il quoziente della divisione di x con y, cioè quel numero q tale che $x - (q \times y)$ sia un numero compreso tra 0 e $y - 1$, estremi inclusi (ad esempio, $\text{qu}(13, 4) = 3$). Oggi calcola numeri secondo la seguente formula:

$$a_i = (-1)^i + (-1)^{\text{qu}(i,2)} + (-1)^{\text{qu}(i,3)} + (-1)^{\text{qu}(i,4)}.$$

Facendo variare i da 1 a 2013, estremi inclusi, quante volte il comandante trova che il valore di a_i è 0?

10. Calcoli alla Barriera, III (Mihaela Badescu)
Un'altra delle funzioni che il comandante dei Guardiani della Notte utilizza è una funzione $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ razionale di variabile razionale tale che

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

per ogni x e y numeri razionali. Il comandante sa che $f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{8}{7}$ e calcola $f\left(\frac{49}{2}\right)$. Che risultato trova?

11. La cava del Mare Stretto (Fulvio Gasparini)
In una cava su un'isola del Mare Stretto, ci sono 5 scatole parlanti di materiali diversi. Ogni scatola contiene un numero naturale e dice solo il vero o solo il falso. La scatola 1 è in ferro e dà due informazioni:

- "il numero dentro di me è il quoziente del numero nella scatola 5 e del numero nella scatola 2"
- "un terzo del numero dentro la scatola 3 è il prodotto di tutti i numeri primi minori di 15 eccetto uno (di questi numeri primi)"

La scatola 2 è in legno di pino e dà due informazioni:

- "almeno una scatola di metallo dice il falso"
- "il numero nella scatola 1 è minore di 200"

La scatola 3 è in rame e dà due informazioni:

- "il numero dentro di me è la differenza tra il numero nella scatola 5 e il numero nella scatola 2"
- "il numero dentro la scatola 1 è primo"

La scatola 4 è in legno di noce e dà due informazioni:

- "la scatola 5 dice il falso"
- "il numero nella scatola 3 è divisibile per 11"

La scatola 5 è in piombo e dice

- "il numero nella scatola 1 è minore di 220"
- "tutte le scatole di legno dicono il falso"

Che numero c'è nella scatola 5?

12. Magia a Roccia del Drago (Fulvio Gasparini)
A Roccia del Drago, dove i giorni dei mesi sono numerati da 3 a 33, il re Beapys Baratheon ha un triangolo magico che cambia forma e dimensione a seconda del giorno del mese, ma è sempre rettangolo e le lunghezze dei suoi lati sono numeri interi. Se il numero del giorno non è primo, il triangolo resta invariato, mentre se il numero del giorno è primo il cateto minore ha la lunghezza pari al numero del giorno. In quale data, ogni mese, la sua area diventa maggiore di 1500 per la prima volta?

13. Lo strappo di Lewyj (Alessio Caminata)

Nelle sue ricerche, Lewyj Stark non trova il libro delle discendenze delle Case di Westeros. In modo molto ambiguo, Lord Varys gli dice quel che lui sa del libro: tutte le pagine tra le due copertine sono numerate in successione a partire dal numero 1, nel libro è stato strappato esattamente un foglio, la somma dei numeri sulle pagine rimanenti è 65000. Lewyj Stark dice che queste informazioni non servono. Lord Varys gli risponde che si sbaglia, ad esempio si può calcolare quante pagine aveva in origine il libro. Quale numero determina Lord Varys?
[*Ogni foglio ha due pagine, ciascuna numerata.*]

14. Il gioco dell'oca alla Barriera (Alessandro Logar)

Alla Barriera si gioca un "gioco dell'oca semplificato" su un tabellone con 6 caselle, numerate rispettivamente $0, 1, 2, \ldots, 5$. È un solitario che si gioca inserendo il segnaposto sulla casella di partenza, lanciando un comune dado a 6 facce e spostando il segnaposto di tanti passi quanti indicati dal dado. La casella 0 è quella di partenza, la casella 5 è quella d'arrivo. Nella casella 1 è scritto: "va nella casella 5" e nella casella 4 è scritto: "va nella casella 3"; il gioco termina quando si arriva alla casella 5. Se si supera la casella 5 si prosegue ripassando per la casella 0. Oggi, contemplando un suo Guardiano che giocava, il comandante Jeor Mormont ha calcolato la probabilità che il gioco non sia ancora finito dopo il sesto turno e, a quel punto, il segnaposto del giocatore si trovi sulla casella 2. Se p/q è la probabilità calcolata dal comandante, con p e q primi tra loro, si determini il numero $q - p$.

15. Calcoli alla Barriera, IV (Daniele Scarlata)

Come detto, per passare il tempo presso la Barriera, i Guardiani della Notte fanno calcoli lunghissimi. Jon, partendo dal numero 2013, sottrae 1 e moltiplica il risultato per 1, poi sottrae 2 al risultato del prodotto e moltiplica per 2 quel che ottiene, e continua fino a quando sottrae 2013 e moltiplica per 2013. Quali sono le ultime tre cifre del numero che ottiene?

16. Calcoli alla Barriera, V (Fulvio Gasparini)

Vicino alla Barriera, fa freddo e non capita nulla. Per scaldarsi, i Guardiani della Notte complicano i calcoli. Ad esempio, Edd l'Addolorato scrive tutte le possibili coppie (p, q) di numeri primi (dunque maggiori di 1) tali che

1. $p + 2q$ sia primo
2. $6p + q$ sia primo
3. $p + q - 124$ sia primo.

Poi scrivono il prodotto $p \cdot q$ per ciascuna di queste coppie. Qual è il minimo prodotto che scrivono?

17. La sfida sulla spiralevolante (Ruggero Pagnan)

Invece di affrontarsi in battaglia, i re Munry Baratheon e Unton Greyjoy decidono di stabilire chi sia il più coraggioso sfidandosi a girare sulla spiralevolante che simula il volo dei draghi. Salgono ciascuno su una navicella che è fissata ad un braccio meccanico rigido che collega la navicella al palo verticale centrale della spiralevolante e che, mantenendosi parallelo al terreno, si solleva mentre ruota intorno al palo centrale per bloccarsi istantaneamente quando raggiunge l'altezza di $45\,\mathrm{m}$. I bracci salgono verticalmente alla velocità costante di $0.5\,\mathrm{m}/\,\mathrm{sec}$ e ruotano intorno al palo alla velocità angolare costante di $20^\circ/\,\mathrm{sec}$. Il braccio che sostiene la navicella di Munry Baratheon ruota su una circonferenza lunga $12\,\mathrm{m}$, il braccio che sostiene la navicella di Unton Greyjoy ruota su una circonferenza lunga $40\,\mathrm{m}$. Quando la giostra inizia a funzionare facendo contemporaneamente ruotare e salire le navicelle, ciascuna di queste descrive un'elica cilindrica. Quando le navicelle si bloccano, Unton Greyjoy vomita. Munry Baratheon ride dichiarandosi vincitore. Sceso a terra, Unton Greyjoy si giustifica con i suoi soldati spiegando che è colpa del percorso più lungo che faceva la sua navicella. Quanto vale la differenza tra i due percorsi in m?

18. I dadi di Bran (Daniele Boccalini)

Bran Stark gioca con usuali dadi a sei facce, moltissimi. Li accosta uno all'altro sul tavolo (senza impilarli o lasciare spazi), in modo da formare rettangoli di varie dimensioni. Si attiene ad una regola precisa: i numeri sulle facce con cui due dadi sono accostati devono fare per somma 6. In ogni dado la somma delle facce opposte è 7. Quanti dadi, al massimo, si possono usare per formare uno dei suddetti rettangoli?

19. I voli di Drogon (Alessandro Logar)

Il drago Drogon si allena a voli precisi. Partendo dal suo trespolo, fa un volo di $200\,\mathrm{m}$ verso Est, da dove è arrivato fa un secondo volo verso Nord ancora di $200\,\mathrm{m}$. Dal punto dove è arrivato, si esercita in balzi precisi: un balzo verso Est di $1\,\mathrm{m}$, si volge di 45° in senso antiorario—cioè punta a Nord-Est—e fa un balzo di $2\,\mathrm{m}$, si gira di 45° in senso antiorario—cioè punta a Nord—e fa un balzo di $3\,\mathrm{m}$, si gira di 45° in senso antiorario—cioè punta a Nord-Ovest—e fa un balzo di $4\,\mathrm{m}$, si gira di 45 gradi in senso antiorario—cioè punta ad Ovest—e fa un balzo di $5\,\mathrm{m}$ e così via, finché l'ultimo balzo che fa è di $400\,\mathrm{m}$. A che distanza dal punto di partenza si trova alla fine dei suoi balzi?

20. Il palazzo di Littlefinger (Luca De Stefano)

Il palazzo di Lord Petyr Baelish ha 70 piani. Ogni piano ha 7 finestre rivolte verso sud. Ad ognuna di queste corrisponde un ufficio, un appartamento o una sala d'attesa. La distribuzione segue le seguenti regole:

1. A ogni piano non possono esserci più sale d'attesa che uffici
2. Una stanza sopra un appartamento è una sala d'attesa
3. Se una stanza direttamente sopra ad un ufficio è adiacente a due altre stanze, allora queste ultime due stanze devono essere dello stesso tipo.

Qual è il numero minimo di uffici presenti nel palazzo?

21. La grata di Lewyj (Alessandro Logar)

La grata alla finestra della cella in cui è rinchiuso Lewyj Stark è formata da ventidue sbarre, undici verticali, undici orizzontali, che formano 100 quadrati tutti uguali di lato 5 cm. Lewyj Stark passa il suo tempo formando con un filo sottile rettangoli di perimetro 1 m con i vertici su incroci tra sbarre (e con tutti e quattro i lati di lunghezza positiva). Quanti rettangoli può formare?

22. La difesa di Bronn (Mihaela Badescu)

Sul campo di battaglia Tyrion Lannister si aspetta che i soldati di Beapys Baratheon attaccheranno risalendo il fiume Acquanera. Ha piazzato tre fari, due sulle rive opposte a est e a ovest. Tyrion è sulla torre a 8 km dal faro sulla riva est e a 5 km dall'altro. Sa anche che la distanza tra i due fari è 8.9 km. Il terzo faro è piazzato su una boa nel fiume esattamente a metà della linea che congiunge i due fari sulle rive. La nave vedetta di Beapys Baratheon compare sulla linea dei tre fari e Tyrion si accorge che il suo angolo di visuale tra il faro sulla riva est e la nave vedetta coincide con il suo angolo di visuale tra la boa e il faro sulla riva ovest. Calcola perciò immediatamente il rapporto tra la distanza della nave vedetta dal faro sulla riva est e quella della nave vedetta dal faro sulla riva ovest e, per preparare la difesa, comunica a Bronn quanto è lontana la nave vedetta dal faro sulla riva ovest. Quanti metri è lontana la nave vedetta dal faro sulla riva ovest?

23. Gli anelli inanellati (Gabriele Balletti)

Il nuovo emblema di Casa Lannister è una coppia di anelli identici, formati facendo ruotare un quadrato attorno ad una retta complanare con il quadrato e parallela alla sua diagonale. I due anelli sono incatenati l'uno all'altro (uno passa nel buco dell'altro). Un'antica leggenda narra che, se la diagonale del quadrato usato per ottenere gli anelli è lunga 30 cm e se il volume occupato dalla coppia di anelli è il minimo possibile, su ogni punto di contatto tra i due anelli si crea un diamante. Il volume in cm^3 del più piccolo solido che contiene tutte le piramidi con vertici sui diamanti (cioè il più piccolo poliedro convesso che contiene tutti i diamanti) indicherà il numero di anni del dominio della Casa Lannister su Westeros. Quanti anni durerà tale dominio?

24. MORTE per CASO (Alessandro Logar)

MORTE controlla i destini dei personaggi con CASO. Davanti a MORTE ci sono due solchi circolari, uno lungo il doppio dell'altro. I due solchi sono collegati in un punto dove c'è uno scambio che permette di passare da un solco all'altro. Una palla gira a velocità perfettamente costante nei solchi (impiega un minuto a completare il solco più corto). CASO, ogni volta che la palla sta per passare nel punto di collegamento, dice "sì" o "no"—a caso, appunto...

Se dice "sì", MORTE apre il collegamento in modo che la palla passi nell'altro solco. Se dice "no", non apre il collegamento e mantiene la palla nello stesso solco. Ogni volta che la palla giunge a metà del solco più lungo muore un personaggio. All'inizio della gara a squadre, la palla passa sul punto di mezzo del secondo solco (e muore un personaggio). Ci si chiede qual è la probabilità che, allo scoccare del quattrodicesimo minuto di gara, muoia un personaggio. Se tale probabilità è p/q, con p e q primi tra loro, si fornisca come risposta il numero $q - p$.

Soluzioni per la Coppa Galileo 2013

Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, hanno contribuito a preparare i testi di gara:
Mihaela Badescu, Gabriele Balletti, Daniele Boccalini, Alessio Caminata, Luca De Stefano, Fulvio Gasparini, Alessandro Logar, Emanuele Maccario, Matteo Musso, Ruggero Pagnan, Maurizio Paolini, Ludovico Pernazza, Edi Rosset, Daniele Scarlata, Carlo Vota.

Winter is coming: l'inverno sta arrivando.
Le profezie non sono certezze; nessuno,
neppure l'autore, sa quando finirà la saga.

Soluzione del problema 1. Ogni coppia di affermazioni uguali deve essere falsa. L'unica vera è la seconda.
La risposta è `0010`.

Soluzione del problema 2. Dato che il foglio iniziale non è un quadrato, è un rettangolo (di area $144\,\mathrm{cm}^2$—tutte le coppie di piegature a metà danno la stessa area) con lati $6\,\mathrm{cm}$ e $24\,\mathrm{cm}$. Il massimo possibile è $2(24+\frac{6}{4})=51$.
La risposta è `0051`.

Soluzione del problema 3. Tutti i codici a 5 cifre possibili sono $10^5=100000$. I tipi di codici utilizzati sono: $xyyyy$, $yyyyx$, $xxyyy$ o $yyyxx$. Ciascun gruppo sono $10^2-10^1=90$, in totale sono 360. I codici di cinque cifre sono $10^5=100000$. Il rapporto è $\dfrac{360}{100000}=\dfrac{9}{2500}$.
La risposta è `2491`.

Soluzione del problema 4. Dalla formula dell'area del trapezio si ottiene:

$$\frac{\left(\overline{AB}+\overline{CD}\right)\times h}{2}=165$$

dove h è l'altezza che vale 15. Da questa equazione si ricava $\overline{CD}=6$. Sia x l'altezza del triangolo CDE relativa al lato CD. Dalla similitudine tra i triangoli CDE e ABE si ricava:

$$x:\overline{CD}=(x+15):\overline{AB}$$

da cui si ottiene $x=9$. L'area del triangolo ABE è quindi data da $16\times(9+15)/2=192$. La risposta è quindi 192.
La risposta è `0192`.

Soluzione del problema 5. PDOR vale 4. Si considerino le partizioni naturali del numero 4 formate da 4 addendi. Esse sono:

$$4=2+2+0+0$$

$$4=2+1+1+0$$

$$4=1+1+1+1$$

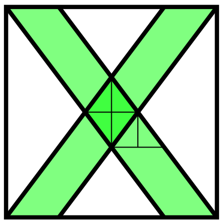
Ora si contino quelle di ciascuna categoria. Rispettivamente ne hanno:

$$\frac{14^2\cdot 1^2\cdot 4!}{2!\cdot 2!}=1176$$

$$\frac{14^1 \cdot 6^2 \cdot 1^1 \cdot 4!}{2!} = 6048$$
$$\frac{6^4 \cdot 4!}{4!} = 1296$$

Il totale ammonta dunque a 8520, da cui escludere il nome iniziale, per cui la soluzione risulta essere 8519.
La risposta è `8519`.

Soluzione del problema 6. L'area del quadrato è $60\,\mathrm{cm} \times 60\,\mathrm{cm} = 3600\,\mathrm{cm}^2$. L'area di un parallelogrammo è $60\,\mathrm{cm} \times 15\,\mathrm{cm} = 900\,\mathrm{cm}^2$. L'area su cui i due parallelogrammi si sovrappongono è $\frac{1}{2} 20\,\mathrm{cm} \times 15\,\mathrm{cm} = 150\,\mathrm{cm}^2$. L'area bianca è $3600\,\mathrm{cm}^2 - 2 \cdot 900\,\mathrm{cm}^2 + 150\,\mathrm{cm}^2 = 1950\,\mathrm{cm}^2$.



La risposta è `1950`.

Soluzione del problema 7. Il numero A_i sulla riga i è $A_i = 1 + 2 + \cdots + 20 + i$, quindi
$$A_1 + \cdots + A_{20} = 21 \cdot (1 + \cdots + 20) = 4410.$$
La risposta è `4410`.

Soluzione del problema 8. Siano a e b le basi maggiore e minore, h_1 l'altezza del trapezio con la trave come base minore, h_2 l'altezza di quello con la trave come base maggiore. Sia x la lunghezza della trave. Deve essere
$$2h_1(a + x) = (a + b)(h_1 + h_2) \qquad \text{e} \qquad 2h_2(b + x) = (a + b)(h_1 + h_2),$$
da cui
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a + b}{2x + a - b} \qquad \text{e} \qquad \frac{h_1}{h_2} = \frac{2x + b - a}{a + b}.$$
Perciò $x^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2}$ da cui si trova $x = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$.
La risposta è `5450`.

Soluzione del problema 9. Conviene aggiungere, per le prime osservazioni, il termine $a_0 = (-1)^0 + (-1)^{\mathrm{qu}(0,2)} + (-1)^{\mathrm{qu}(0,3)} + (-1)^{\mathrm{qu}(0,4)}$, che è diverso da zero e non interverrà nel computo finale. Consideriamo i singoli addendi di a_i, per $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$:

$$\begin{array}{rll}
(-1)^i = & 1,-1,\ \ 1,-1,\ \ 1,-1,\ \ 1,-1,\ldots & \text{si ripete ogni 2 passi} \\
(-1)^{\mathrm{qu}(i,2)} = & 1,\ \ 1,-1,-1,\ \ 1,\ \ 1,-1,-1,\ldots & \text{si ripete ogni 4 passi} \\
(-1)^{\mathrm{qu}(i,3)} = & 1,\ \ 1,\ \ 1,-1,-1,-1,\ \ 1,\ \ 1,\ldots & \text{si ripete dopo 6 passi} \\
(-1)^{\mathrm{qu}(i,4)} = & 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,-1,-1,-1,-1,\ldots & \text{si ripete ogni 8 passi.}
\end{array}$$

Poiché $\mathrm{mcm}(2, 4, 6, 8) = 24$, si ha che a_i si ripete dopo 24 passi, cioè $a_i = a_{i+24}$. Basta allora calcolare quante volte a_i vale 0 per i primi 24 valori di i e questi sono in totale 8 e cioè per $i = 4, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 19$. Poiché $\mathrm{qu}(2013, 24) = 83$ con il resto

di 21, in totale abbiamo che nella successione degli a_i lo zero compare $84 \times 8 = 672$ volte.
La risposta è 0672.

Soluzione del problema 10. La funzione soddisfa la relazione $f(ax) = f(a) \cdot x$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$ e ogni $a \in \mathbb{Q}$. Infatti, per $x = 0$, $f(a0) = f(0) = f(0) + f(0)$; quindi $f(a0) = 0$. Inoltre, assumendo $f(an) = f(a) \cdot n$ per $n \in \mathbb{N}$,

$$f(a(n+1)) = f(an) + f(a) = f(a) \cdot n + f(a).$$

Dato che $0 = f(0) = f(an + a(-n)) = f(an) + f(-an)$

$$f(-an) = -f(an) = f(a) \cdot (-n).$$

Per $a = \frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, si trova perciò $f(p) = f\left(\frac{p}{q} \cdot q\right) = q \cdot f\left(\frac{p}{q}\right)$, così

$$p \cdot f(1) = q \cdot f\left(\frac{p}{q}\right)$$

e $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} \cdot f(1)$. Perciò, dalla relazione $f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{8}{7}$, si trova che $f(1) = \frac{64}{49}$.
Risulta $f\left(\frac{49}{2}\right) = \frac{49}{2} \cdot f(1) = \frac{49}{2} \cdot \frac{64}{49} = 32$.
La risposta è 0032.

Soluzione del problema 11. Sia n_k il numero nella scatola k, $k = 1, \ldots, 5$. Se tutte le scatole di legno dicono il vero, n_1 è minore di 200 e maggiore di 220. Questo è assurdo. Se la scatola 2 è vera e la scatola 4 è falsa, allora la scatola 5 è vera quindi la 2 è falsa: assurdo. Dunque, la scatola 2 è falsa; tutte le scatole di metallo sono vere, quindi, per la scatola 5, tutte le scatole di legno sono false. Perciò $200 < n_1 < 220$ ed è primo. L'unico primo in questo intervallo è 211. I fattori di n_3 possono essere $2, 3^2, 5, 7, 11, 13$ da cui si deve escludere il fattore 11 perchè la scatola 4 dice il falso, così $n_3 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 8190$. A questo punto $n_2 = 8190/210 = 39$, quindi $n_5 = 8229$.
La risposta è 8229.

Soluzione del problema 12. I triangoli richiesti hanno i lati di lunghezza $(a, \frac{a^2-1}{2}, \frac{a^2+1}{2})$. L'area del giorno 17 è 1224 e l'area del giorno 19 è 1710. La risposta corretta, quindi, è 19.
La risposta è 0019.

Soluzione del problema 13. Si deve trovare un numero n pari ed un numero i tali che

$$\frac{n(n+1)}{2} - i - (i+1) = \frac{n(n+1)}{2} - (2i+1) = 65000.$$

La soluzione positiva dell'equazione $x^2 + x - 2 \cdot 65000 = 0$ è compresa tra 360 e 361 dato che $\sqrt{1 + 4 \cdot 130000} \approx 721.11$. Perciò $n = 362$ (e $i = 351$).
La risposta è 0362.

Soluzione del problema 14. Se il segnaposto è in 0 e si lancia il dato, il segnaposto finisce in 0 con probabilità 1/6 (solo se il dado ha il valore 6), finisce in 2 con probabilità 1/6 (solo se il dado ha il valore 2), finisce in 3 con probabilità 1/3 (se il dado ha il valore 3 o 4), finisce in 5 (cioè si vince) con probabilità 1/3 (se il dado ha il valore 1 o 5). Un conto analogo prova che ogni volta che si lancia il dado, la probabilità di finire la partita è sempre 1/3 e la probabilità di finire nella

casella 2 è sempre 1/6. La probabilità di continuare la partita fino al sesto lancio con il segnaposto in 2 coincide quindi con la probabilità che si verifichino i seguenti due eventi indipendenti: la partita continua fino al quinto lancio (vale $(2/3)^5$) e al sesto lancio il segnaposto finisca in 2 (probabilità 1/6). La probabilità complessiva è quindi $(2/3)^5 \times 1/6 = 16/729$. La risposta è quindi 713.
La risposta è `0713`.

Soluzione del problema 15. Siano $r_0 = 2013$, $r_1 = (r_0-1)\times 1$, $r_2 = (r_1-2)\times 2$,... i risultati via via ottenuti. Visto che interessano soltanto le ultime tre cifre, basta considerare i resti dei risultati rispetto alla divisione con 1000, come faremo d'ora innanzi. Perciò le ultime tre cifre di r_{2000} sono 000 e basta calcolare la lista delle ultime tre cifre, cioè i resti dei risultati nella divisione con 1000:

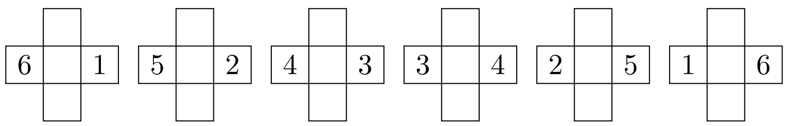
ultime tre cifre di $r_{2001} = 999$	ultime tre cifre di $r_{2007} = 609$
ultime tre cifre di $r_{2002} = 994$	ultime tre cifre di $r_{2008} = 808$
ultime tre cifre di $r_{2003} = 973$	ultime tre cifre di $r_{2009} = 191$
ultime tre cifre di $r_{2004} = 876$	ultime tre cifre di $r_{2010} = 810$
ultime tre cifre di $r_{2005} = 355$	ultime tre cifre di $r_{2011} = 789$
ultime tre cifre di $r_{2006} = 094$	ultime tre cifre di $r_{2012} = 324$
	ultime tre cifre di $r_{2013} = 43$

La risposta è `0043`.

Soluzione del problema 16. Sia (p, q) la generica coppia di numeri primi. Dalla prima condizione si ha $p \neq 2$. Dalla seconda condizione si ha $q \neq 2$. Poiché è la somma di due numeri dispari è pari si ha che $p + q$ è pari, allora la differenza di due numeri pari deve essere pari. Quindi $p + q - 124 = 2$, visto che 2 è l'unico numero primo pari, di conseguenza, $p + q = 126$. Si procede per tentativi: $126 - 3 = 123$ non è primo, $126 - 5 = 121$ non è primo, $126 - 7 = 119$ non è primo, $126 - 11 = 115$ non è primo. $126 - 13 = 113$ è primo e il prodotto è 1469.
Tutte le coppie successive fino a 61 hanno il prodotto maggiore di 1469.
La risposta è `1469`.

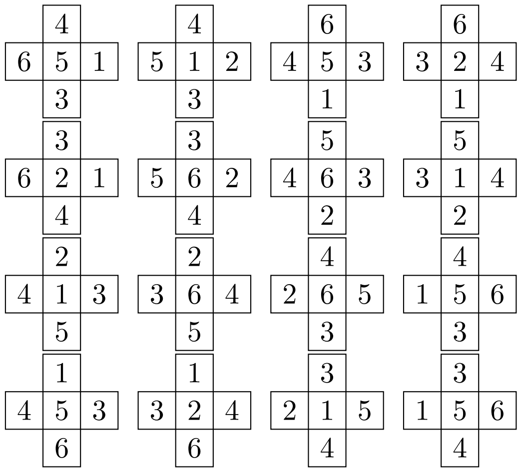
Soluzione del problema 17. Le due navicelle ruotano per $20°/\sec \dfrac{45\,\mathrm{m}}{.5\,\mathrm{m}/\sec} = 1800°$, cioè fanno 5 giri. Completano un giro ogni 9 m. Sviluppando le superfici laterali dei cilindri su cui si sviluppano i due percorsi, si trova che le navicelle percorrono la diagonale di un rettangolo che ha base di 5ℓ dove ℓ è la lunghezza della circonferenza e altezza 45 m, cioè $\sqrt{(5\ell)^2 + 45^2} = 5\sqrt{\ell^2 + 9^2}$.
I due percorsi sono $5\sqrt{12^2 + 9^2} = 5 \times 15 = 75$ e $5\sqrt{40^2 + 9^2} = 5 \times 41 = 205$; la differenza è 130.
La risposta è `0130`.

Soluzione del problema 18. Una fila consiste al massimo di 6 dadi come segue:



Il rettangolo di dadi non può avere più di 6 dadi sul lato maggiore. Dato che la faccia 6 non può essere mai a contatto, tutti i dadi interni al rettangolo non aderiscono mai su quella. Perciò una faccia 5 di un dado interno deve aderire ad una faccia 1, necessariamente di un dado esterno, dunque il lato minore non può avere più di

4 dadi. Inoltre, impilando file lunghe almeno 5 dadi, nella terza colonna, i dadi aderiscono con le facce 3 e 4 che non sono dunque disponibili per le colonne. Perciò, cercando di costruire un rettangolo con un lato con almeno 5 dadi, si ottiene al massimo un rettangolo di 6 dadi per 2. Si vede ora che si realizza un rettangolo di 4 dadi per 4:



La risposta è `0016`.

Soluzione del problema 19. Escludendo i primi due balzi, la sequenza degli altri si può così rappresentare: metri che il drago si sposta verso Est: $1+9+17+\cdots+(1+8i)+\cdots$ dove i è un intero tale che $1+8i \leq 400$, quindi i al massimo può valere 49. Analogamente il drago si sposta verso Nord-Est di $2+10+18+\cdots+394$ metri, cioè della somma di $2+8i$ con $i=0,1,\ldots,49$, quindi otteniamo la seguente tabella

E	$1+9+\cdots+(1+8\cdot 49)=(49+1)(2\cdot 1+8\cdot 49)/2=9850$
N-E	$2+10+\cdots+(2+8\cdot 49)=(49+1)(2\cdot 2+8\cdot 49)/2=9900$
N	$3+11+\cdots+(3+8\cdot 49)=(49+1)(2\cdot 3+8\cdot 49)/2=9950$
N-O	$4+12+\cdots+(4+8\cdot 49)=(49+1)(2\cdot 4+8\cdot 49)/2=10000$
O	$5+13+\cdots+(5+8\cdot 49)=(49+1)(2\cdot 5+8\cdot 49)/2=10050$
S-O	$6+14+\cdots+(6+8\cdot 49)=(49+1)(2\cdot 6+8\cdot 49)/2=10100$
S	$7+15+\cdots+(7+8\cdot 49)=(49+1)(2\cdot 7+8\cdot 49)/2=10150$
S-E	$8+16+\cdots+(8+8\cdot 49)=(49+1)(2\cdot 8+8\cdot 49)/2=10200$

Spostarsi ad Est di 9850 metri equivale ovviamente a spostarsi ad Ovest di -9850 metri, analogamente N-E si può associare a S-O, N-O a S-E e N a S. Quindi il drago si sposta di 200 metri ad Ovest, di 200 metri a Sud-Ovest, di 200 metri a Sud e di 200 metri a Sud-Est. Tenendo conto dei due balzi iniziali, si sposta dal punto iniziale di 200 metri a Sud-Ovest e 200 metri a Sud-Est, cioè si sposta dal punto iniziale di $200\sqrt{2}$ metri (a Sud). La risposta è quindi 282.
La risposta è `0282`.

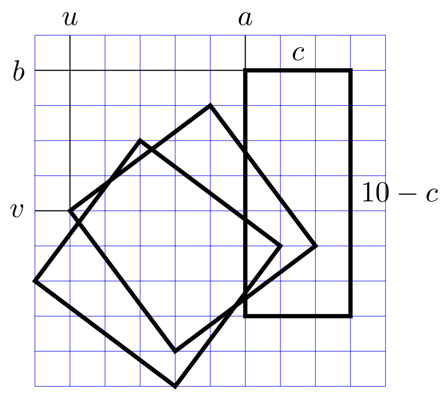
Soluzione del problema 20. Si osserva innanzi tutto che esiste una configurazione accettabile in cui ci sono 174 uffici:

S=Sala d'attesa, A=Appartamento, U=Ufficio

`AAAAAAA`	Piano 70	0 uffici
`USUSUSU`	Piano 69	4 uffici
`UASASAU`	Piano 68	fino a qui ci sono $5 \times 34 = 170$ uffici
⋮		
`USUSASU`	Piano 3	3 uffici
`UASASAU`	Piano 2	2 uffici, fino a qui ci sono 5 uffici
`USUSASU`	Piano 1	3 uffici

Non esiste una configurazione con meno uffici. Infatti
(1) a ogni piano non possono esserci più di 3 sale d'attesa, altrimenti ci sarebbero sicuramente più sale d'attesa che uffici a quel piano.
(2) a ogni piano, eccetto l'ultimo, non possono esserci più di 3 appartamenti, altrimenti al piano successivo ci sarebbero più di 3 sale d'attesa
(3) sopra un piano con 2 uffici ce ne deve essere uno con almeno 3 uffici. Se a un piano ci sono 2 uffici, ci sono al massimo 2 sale d'attesa; questo è anche il numero minimo (se fossero meno ci sarebbero più di 3 appartamenti). Allora in un piano con 2 uffici ci sono esattamente 2 sale d'attesa e 3 appartamenti. Allora al piano successivo ci sono almeno 3 sale d'attesa, dunque almeno 3 uffici.
(4) Ad ogni piano, eccetto all'ultimo, ci devono essere almeno 2 uffici, altrimenti a tale piano ci sarebbe al massimo una sala d'attesa e dunque almeno 5 appartamenti, contraddicendo l'osservazione (2).
Da (1)-(4) segue che nei primi 68 piani il minimo numero di uffici si ottiene alternando un piano da 2 uffici a uno da 3 uffici.
Ora resta da dimostrare che negli ultimi 2 piani non si possono mettere meno di 4 uffici: infatti, al piano 69, per l'osservazione (4), devono esserci almeno 2 uffici. Per avere meno di 4 uffici negli ultimi 2 piani, vi sono solo due possibilità: 2-1, 2-0. Ma per l'osservazione (3), nessuna delle due è accettabile.
La risposta è `0174`.

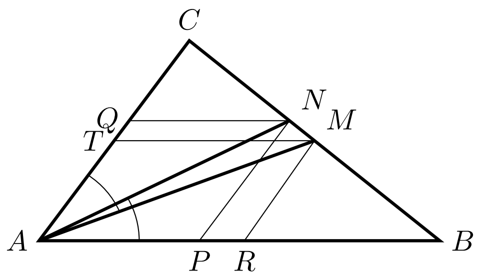
Soluzione del problema 21. Sia $\ell = 5\,\mathrm{cm}$. Un rettangolo con i vertici nella griglia può essere di due tipi: con i lati paralleli ai lati della griglia oppure un quadrato con i lati obliqui, inclinati in modo che siano le ipotenuse di triangoli rettangoli con cateti lunghi 3ℓ e 4ℓ, inclinati come mostrato in figura



Dette (u, v) le coordinate di un vertice di uno di questi quadrati (come in figura), si vede facilmente che u può variare tra 0 e 3, mentre v può variare tra 3 e 6. Quindi ci sono 16 quadrati di questo tipo. Analogamente ci sono altri 16 quadrati del secondo tipo.
Siano poi a, b le coordinate di un vertice di un rettangolo con i lati paralleli ai lati della griglia e sia c la lunghezza del lato orizzontale (quindi il lato verticale

vale $10 - c$). Il lato c può assumere valori tra 1 e 9. Fissato un valore di c le coordinate a, b devono essere tali che $0 \leq a \leq 10 - c$, e $0 \leq b \leq c$. Pertanto se $c = 1$ abbiamo 10×2 rettangoli, se $c = 2$ ne abbiamo 9×3, e così via. Il numero totale dei rettangoli con i vertici sui punti della griglia e con perimetro 20 è quindi: $16 + 16 + 10 \times 2 + 9 \times 3 + 8 \times 4 + \cdots + 3 \times 9 + 2 \times 10$. Quindi la risposta è 296.
La risposta è `0296`.

Soluzione del problema 22. Sia A la posizione di Tyrion, B il faro sulla riva est, C quello sulla riva ovest, M la posizione della boa, N la posizione della nave vedetta. Si costruiscono le parallele $NP \parallel AC$ con P su AB, $NQ \parallel AB$ con Q su AC, $MR \parallel AC$ con R su AB e $MT \parallel AB$ con T su AC. Dato che M è punto medio, anche R e T sono punti medi.



Si ottengono le relazioni

$$\frac{BN}{BC} = \frac{PN}{AC} \qquad \frac{BC}{CN} = \frac{AB}{NQ} \qquad \frac{CT}{AC} = \frac{TM}{AB}$$

Perciò

$$\frac{BN}{CN} = \frac{PN \cdot AB}{AC \cdot AP}$$

Inoltre, gli angoli $\widehat{ATM}$ e $\widehat{APN}$ sono uguali in quanto angoli opposti di un parallelogrammo. Perciò i triangoli APN e ATM sono simili; quindi $\frac{AP}{AT} = \frac{PN}{TM}$. Ne risulta

$$\frac{AP}{PN} = \frac{AT}{TM} = \frac{CT}{TM} = \frac{AC}{AB}.$$

Perciò

$$\frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2} = \left(\frac{8\,\mathrm{km}}{5\,\mathrm{km}}\right)^2 = 2.56.$$

Dunque $CN = \dfrac{BC}{3.56} = \dfrac{8.9\,\mathrm{km}}{3.56} = 2500\,\mathrm{m}$.
La risposta è `2500`.

Soluzione del problema 23. Sia $l = 30$ la diagonale della sezione quadrata. Il solido con volume minimo è formato con anelli ottenuti facendo ruotare i quadrati attorno ad una retta parallela alla diagonale del quadrato, posta a distanza $\frac{l}{2}$ dal vertice più vicino.
Questi due anelli, incatenandosi, danno luogo a 7 punti di contatto, tali punti sono i vertici di due quadrati uguali di lato l che hanno una coppia di diagonali sulla stessa retta, un vertice in comune e giacenti su piani perpendicolari.
Il solido di cui cerchiamo il volume è formato da due piramidi uguali con la base quadrilatera in comune. Ognuna delle piramidi ha come base il quadrilatero che ha tre vertici sui tre punti di un quadrato (che non siano il punto in comune ad entrambi i quadrati) e il quarto vertice nel vertice più lontano del secondo quadrato

e altezza pari alla metà della diagonale di un quadrato. Il volume cercato è quindi a $2\frac{1}{3} \cdot 2l^2 \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^3}{3} = 9000$.
La risposta è `9000`.

Soluzione del problema 24. La palla in un minuto compie il giro completo del solco piccolo oppure mezzo giro del solco grande. Sia S il punto di collegamento e T il punto di mezzo del solco grande. Misuriamo il tempo a partire dall'inizio della gara. Sia $p_S(t)$ la probabilità che la palla si trovi in S all'istante t (con $t = 1, 2, \ldots$; t misurato in minuti). Pertanto $p_S(1) = 1$ perché allo scoccare del primo minuto la palla è in S. Sia $p_T(t)$ la probabilità che la palla non sia in S nell'istante t (quindi è in T). Ovviamente $p_S(t) + p_T(t) = 1$. Valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} p_T(t) &= \frac{1}{2} p_S(t-1) \\ p_S(t) &= p_T(t-1) + \frac{1}{2} p_S(t-1) \end{cases}$$

La prima equazione deriva dal fatto che, affinché la palla sia in T all'istante t, un minuto prima deve essere transitata per S e quando transita per S ha probabilità $1/2$ di andare sul solco grande. La seconda equazione deriva dal fatto che, se la palla all'istante t si trova in S, allora un minuto prima poteva essere in T (e in questo caso dovrà necessariamente passare per S dopo un minuto) oppure poteva essere in S e aver imboccato il solco piccolo (con probabilità $1/2$). Dal sistema di sopra si ricava che

$$p_T(t) = \frac{1}{4}\left(p_T(t-2) + 1\right)$$

Quindi, poiché $p_T(1) = 0$, si ottiene:

$$p_T(3) = \frac{1}{4}, \quad p_T(5) = \frac{5}{16}, \quad p_T(7) = \frac{21}{64},$$

$$p_T(9) = \frac{85}{256}, \quad p_T(11) = \frac{341}{1024}, \quad p_T(13) = \frac{1365}{4096}.$$

quindi $p_S(13) = 1 - p_T(13)$ e infine $p_T(14) = \dfrac{1}{2} p_S(13) = \dfrac{2731}{8192}$.
La risposta è `5461`.