Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
$\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{7} = 2,6458$ $\pi = 3,1416$.

1. Il pranzo dei cavalieri dell'Apocalisse

I quattro cavalieri dell'Apocalisse, Carestia, Guerra, Morte e Inquinamento (Peste diede le dimissioni nel 1936 dopo l'invenzione della pennicillina), stanno per mangiare insieme quando Morte si accorge di non avere soldi. Gli altri decidono di dargli ciascuno la stessa somma di denaro. Carestia dà così a Morte un quinto del denaro che ha in tasca, Guerra gli dà un quarto del denaro che ha in tasca, e Inquinamento gli dà un terzo di quanto ha lui. Dopo aver pagato ciascuno il proprio pasto, si accorgono di essere stati fortunati perché sono rimasti tutti senza soldi: quello che ha pagato meno tra i quattro ha pagato €6.80.
Quanto è costato, in centesimi di euro, il pasto più caro?

2. I due cori

Il 30% dei membri del coro dei tibetani appartiene anche al coro degli atlantidi, l'80% dei membri del coro degli atlantidi appartiene anche al coro dei tibetani. Coloro che sono membri di almeno uno dei due cori sono 7869.
Quanti sono i membri del coro degli atlantidi?

3. I numeri dell'Apocalisse

Il Metatron aveva annunciato i due numeri dell'Apocalisse; Aziraphale, l'angelo della cacciata, li aveva scritti su un foglio, ma Crowley, il diavolo della mela, li aveva fatti subito scomparire. Quando i due si rendono conto che conviene conoscerli per evitare che l'Apocalisse avvenga, Aziraphale capisce che può recuperarli perché il Metatron, in uno dei suoi soliti eccessi logorroici, gli aveva spiegato che erano due numeri di quattro cifre, scritti ciascuno usando una volta le cifre 2, 4, 5 e 7 e che uno era multiplo dell'altro.
Qual è il più grande dei due?

4. Le pietre degli Inferi

Ligur, il capo della cava sotterranea, deve far trasportare 100 t di pietre, ciascuna di peso inferiore ad 1 t, dalla cava ad un deposito. Ha a disposizione un solo camion con portata massima di 1 t. Il camion viaggia sempre non ulteriormente caricabile, nel senso che, per ogni viaggio, non è possibile aggiungere alcuna pietra senza superare la portata massima.
Qual è il massimo numero possibile di viaggi, dalla cava al deposito, che il camion dovrà fare per trasportare tutte le pietre?

5. Cocktail letale

La ricetta del cocktail che Crowley sta per bere prevede l'uso di 2 parti di superalcolico a 45 gradi, 1 parte di liquore a 40 gradi, e 1 parte di succo a 0 gradi.
Qual è la gradazione alcolica del cocktail? Si dia la soluzione scrivendo la gradazione alcolica moltiplicata per 10.
[**N.B.** Si ricorda che la gradazione alcolica è il rapporto, moltiplicato per 100, tra il volume di alcol puro e il volume totale del liquido.]

6. Allo zoo di Tadfield, I

Nello zoo di Tadfield, la ridente cittadina dove inizierà l'Apocalisse, ci sono cinque scimmie di nome Alberto, Berto, Certo, Derto ed Erto. Sylvier, il curatore dello zoo, ha insegnato alle scimmie a indossare magliette. Alle scimmie piace molto mostrare la loro nuova abilità, ma nessuna indosserebbe mai una maglietta di un colore che detesta: Alberto detesta il rosso e il blu, Berto il verde; Certo detesta il rosso e il verde, Derto il rosso ed Erto odia il blu e il verde. Sylvier non conosce le loro avversioni ai colori: ha comprato magliette gialle, blu, verdi e rosse e le ha lasciate nella loro camera da gioco sperando che ciascuna di loro esca con una maglietta indosso, come effettivamente accade. Le scimmie si sono appollaiate su un ramo in ordine di nome: due indossano una maglietta rossa, e la scimmia in maglietta blu è accanto ad una in maglietta verde.
Determinare che colori indossano Berto, Certo, Derto ed Erto, scrivendo in ordine i codici dei colori indossati, usando il codice seguente: 1=giallo, 2=blu, 3=verde, 4=rosso.

7. Il quadrilatero divino

A Tadfield, il *Divine Quad* è una piazza a forma di trapezio rettangolo con i lati paralleli di lunghezza 66 m e 84 m e il lato perpendicolare a questi di lunghezza 135 m. Sul pavimento della piazza sono tracciate le diagonali del trapezio. I quattro segmenti dal punto di incontro delle diagonali verso ciascuno degli angoli della piazza sono chiamati *percorsi dell'estasi*.
Qual è la lunghezza in centimetri del percorso dell'estasi più lungo?

8. Davanti al laboratorio *Ell*, I

Davanti al laboratorio di artisti del legno *Ell*, si erge una struttura formata da una lettera **L**, ottenuta con un taglio e un'incollatura: preso un cilindro di legno alto 6 m con diametro di base di 2 m, lo si taglia in due parti uguali segandolo con un singolo taglio, inclinato di 45° rispetto all'asse del cilindro; poi si uniscono le due sezioni facendole coincidere perfettamente a formare la **L**. La **L** davanti al laboratorio è dipinta completamente di vernice fosforescente.
Qual è l'area coperta dalla vernice in dm^2, comprese le basi?

9. La stella di Adam

Adam disegna una stella a cinque punte, unendo cinque punti con cinque segmenti. Quattro angoli nelle punte gli vengono della stessa ampiezza; l'ampiezza dell'angolo in punta diverso dagli altri è 12°.
Qual è l'ampiezza in gradi di uno dei quattro angoli in punta uguali?

10. Il foglio di Pepper

Pepper prende un foglio, lo piega in due sul lato lungo e lo taglia lungo la piega. Prende una delle due parti, la piega in due sul lato lungo e la taglia lungo la piega. Ripete la stessa operazione altre tre volte (cinque tagli in tutto), ed ottiene un foglietto di dimensioni 62 mm $\times$ 88 mm.
Quanto poteva misurare al massimo il lato lungo del foglio da cui aveva iniziato? Quanto poteva misurare al minimo? Dare come risposta la differenza tra le due misure in millimetri.

11. L'iniziale di Wensleydale
Wensleydale ha preso un foglio $12\,\text{cm} \times 8\,\text{cm}$, l'ha piegato a metà sul lato lungo. Ha marcato tre punti sul foglio piegato: il punto X a metà sulla piega, e i due punti A e B a $2\,\text{cm}$ dalla piega su ciascuno dei lati piegati. Ha poi fatto due tagli: uno lungo il segmento XA, l'altro da B, parallelamente al primo taglio, in modo di arrivare fino al vertice. Dispiegando il foglio, si è accorto di aver ottenuto una V. Ne ha fatta un'altra uguale e le ha sovrapposte su un triangolo isoscele in cui il lato diverso dagli altri due è di $4\,\text{cm}$ per ottenere una W.
Qual è l'area della W in cm^2?

12. Il passatempo di Brian
Brian sta cercando qualche numero intero n tale che la somma $2^{2008} + 2^{3599} + 2^n$ risulti un quadrato perfetto.
Qual è il più grande numero intero n che Brian può trovare?

13. I loro compleanni
Qual è la probabilità che i compleanni di Adam, Pepper, Wensleydale e Brian cadano in 4 giorni diversi della settimana? Si dia come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ottenuta dopo aver semplificato tutti i fattori comuni.

14. Lo scrigno della strega
Newton Pulsifer cerca di determinare una combinazione di quattro cifre per aprire la serratura di uno scrigno. Avendo torturato la strega, proprietaria dello scrigno, Newton ha scoperto che la combinazione è un quadrato perfetto con penultima cifra 5.
Qual è il più grande numero di quattro cifre che può essere la combinazione cercata da Newton?

15. La ricerca di Aziraphale
Il Metatron ha spiegato ad Aziraphale che deve cercare il neonato predestinato in quelle stanze dell'ospedale i cui numeri di 4 cifre hanno la proprietà che, sostituendo in qualsiasi modo al massimo 3 cifre, non si ottiene mai un multiplo positivo di 1792.
Scrivere la differenza tra il più grande e il più piccolo dei numeri delle stanze in cui Aziraphale deve cercare il predestinato.

16. Il giardino di Tadfield
Il giardino pubblico di Tadfield è limitato da due vialetti che si allontanano dall'ingresso formando tra loro un angolo di $60°$. All'interno del giardino ci sono 3 stagni circolari, uno dei quali è tangente agli altri due; ciascun vialetto passa tangenzialmente ad ogni stagno. Il primo stagno occupa un'area di $85\,\text{m}^2$.
Qual è l'area occupata dai tre stagni in m^2?

17. Allo zoo di Tadfield, II
Sylvier aveva effettivamente comprato 1 maglietta gialla, 2 blu, 2 verdi e 3 rosse, lasciandole nella camera delle cinque scimmie.
In quanti modi le scimmie Alberto, Berto, Certo, Derto ed Erto potevano aver indossato le magliette, tenendo conto delle loro avversioni ai colori?

18. Davanti al laboratorio *Ell*, II
Una formica è al centro del cerchio in cima della **L** davanti al laboratorio *Ell*. Un'altra è al centro dell'altro cerchio sulla **L**.
Quanto è lungo in millimetri il percorso più breve che permette ad una formica di raggiungere l'altra?

19. Il passatempo di Warlock
Per passare il tempo, Warlock calcola la quattordicesima potenza di un numero intero positivo e ottiene 11419772692875286329496527672l.
Qual è il numero intero positivo che Warlock ha elevato alla quattordicesima potenza?

20. I megaliti dell'Apocalisse
Nella grande pianura a sud di Tadfield, sono tracciate in gesso due linee bianche parallele, alla distanza di 240 cm, a formare una striscia di terreno lunga 20 km. All'interno della striscia sono posati megaliti (grandi pietre) tutti uguali—si racconta che siano stati lasciati dai cavalieri dell'Apocalisse come preavviso. Tutti i megaliti hanno la stessa forma di prisma retto, ciascuno alto 3 m. Ogni base è a forma di trapezio rettangolo: i lati paralleli sono di 58 cm e 128 cm, il lato perpendicolare a questi è di 240 cm. I megaliti sono posati in modo che le basi maggiori del trapezio siano tutte allineate su una delle due linee bianche e i lati obliqui del trapezio siano paralleli tra loro. Un megalito è caduto, ruotando sul lato obliquo della base ed ora, a terra, sfiora appena il megalito vicino. In effetti, c'è sempre sufficiente distanza tra due megaliti in modo che, se un megalito cade ruotando sul lato obliquo, non tocchi il megalito vicino.
Qual è il massimo numero possibile di megaliti posati sulla striscia nella grande pianura?

21. Il poker ineffabile
10 entità soprannaturali, stufe di giocare a dadi con l'universo, decidono di giocare a poker. Sedute intorno ad un tavolo rotondo, si accordano che, a metà serata, tutte si alzeranno per risedersi seguendo rigorosamente questa regola: ogni entità si potrà risedere al posto che occupava precedentemente oppure in uno dei due posti adiacenti.
Quante sono le possibili configurazioni del tavolo di gioco, diverse da quella iniziale, dopo che tutte le entità si saranno alzate e risedute?
[**N.B.** Due configurazioni che differiscono soltanto per una rotazione sono da considerarsi la stessa ai fini del conteggio.]

22. Il biliardo triangolare
Crowley e Aziraphale giocano a biliardo su un biliardo triangolare con le tre sponde della stessa lunghezza di 2 m e una buca in ciascun angolo. Giocano con una palla e le regole seguenti: si posiziona la palla davanti ad una buca e la si colpisce in modo da farla rimbalzare quante volte si vuole, ma almeno due volte contro una delle sponde, e farla terminare nella buca davanti a cui si era piazzata la palla.
Qual è la lunghezza in centimetri del minimo percorso con cui si può mandare la palla correttamente in buca?
[**N.B.** Si considerino palla e buche puntiformi, la palla sullo stesso punto della buca e i giocatori tanto potenti quanto può servire.]

23. Allo zoo di Tadfield, III
In quanti modi le scimmie Alberto, Berto, Certo, Derto ed Erto avrebbero potuto indossare le magliette che Sylvier aveva comprato, se non avessero avuto avversione ad alcun colore?

24. La profezia di Agnes Nutter
La profezia di Agnes Nutter permetteva di determinare con precisione quale sarebbe stato l'anno N d.C. degli accadimenti dell'Apocalisse. Nella profezia, Agnes dichiarava che l'Apocalisse sarebbe avvenuta prima del 10000 d.C. e che i seguenti indizi erano sicuramente falsi o veri:

1. Le frasi pari sono sempre vere.
2. Le prossime due frasi sono entrambe false.
3. Se a N tolgo il numero di frasi vere, si ottiene una potenza di 2.
4. Se a N tolgo il numero della prima frase falsa, si ottiene un multiplo di 3.
5. Le due frasi precedenti a questa sono entrambe vere.
6. Tra le prime 6 frasi ce ne sono almeno 5 false.
7. Il numero di divisori di N è dato dal numero di frasi false.
8. Sottraendo a N il numero della prima frase falsa dopo questa, si ottiene una potenza di 3.
9. Tra le ultime 7 frasi ci sono più frasi false che vere.
10. Le frasi vere sono più di quelle false.
11. Ci sono 5 frasi false consecutive.
12. Se a N aggiungo il numero dell'ultima frase vera, si ottiene un multiplo di 7.
13. Le ultime 3 frasi sono tutte vere o tutte false.

Qual era l'anno indicato dalla profezia di Agnes Nutter?

Per saperne di più, si possono consultare
Le Buone e Accurate Profezie di Agnes Nutter*,*
come trascritte da Terry Pratchett e Neil Gaiman,
a cui appartengono i diritti sui personaggi e luoghi menzionati
e a cui vanno $\aleph_1$ *ringraziamenti per l'eccellente trascrizione.*

Soluzioni per la Coppa Fermat 2008

Le note, scritte da Agnes Nutter nel XVII secolo, contenevano, tra varie altre incongruenze, una lista di frasi di chiaro contenuto matematico, ma di nessun significato immediato. Per una coincidenza che appare incredibile, una larga parte di quelle frasi si adattano quasi perfettamente a descrivere le soluzioni dei 24 problemi proposti nella gara a squadre. Le elenchiamo nel seguito indicando a quale problema pensiamo si riferiscono.

Soluzione del problema 1 I rapporti dei prezzi sono

Carestia	Guerra	Inquinamento	Morte
4	3	2	3

Il pasto meno caro è quello di Inquinamento; il più caro è quello di Carestia che ha pagato $\frac{4}{2}6.80€ = 13.60€$.

Soluzione del problema 2 Sia $T = 7869$, siano t i membri del coro dei tibetani ed a quelli del coro degli atlantidi. I membri in comune sono $c = \frac{3}{10}t = \frac{8}{10}a$ e $a + t = T + c$. Perciò $t = \frac{8}{3}a$ e $a + \frac{8}{3}a - \frac{8}{10}a = T$. Così $a = \frac{15}{43}T = 2745$.

Soluzione del problema 3 Ci sono $4! = 24$ numeri possibili. Se il numero da trovare è un multiplo di un altro numero ottenuto con quelle cifre, il quoto tra i due è al massimo 3 perché $2457 \times 4 = 9828$. Non può terminare con 7. Se il numero da trovare termina con 5, il divisore termina con 5 e il quoto è 3; se termina con 2, il divisore termina con 4 e il quoto è ancora 3; se termina con 4, il divisore termina con 2 e il quoto è 2. L'ultimo caso è impossibile, dato che la prima cifra non può essere minore di 3. Nei due casi rimasti, il divisore deve iniziare con 2. Del resto, la penultima cifra del multiplo è il successore dell'ultima cifra della moltiplicazione per 3 di 4, 5, o 7. L'unica possibile è 7. In effetti, dopo la riduzione a due casi, i tentativi restano quattro:

$$\begin{aligned} 2475 \times 3 &= 7425 \\ 2745 \times 3 &= 8235 \\ 2574 \times 3 &= 7722 \\ 2754 \times 3 &= 8262 \end{aligned}$$

Soluzione del problema 4 Le pietre siano n, la pietra k pesa p_k t. Il caso peggiore possibile è che ogni coppia di pietre pesi di più di 1 t. Di conseguenza, al massimo una pietra pesa meno di $\frac{1}{2}$ t, diciamo la pietra 1. Così $100 = \sum_{k=1}^{n} p_k = (p_1 + p_2) + \sum_{k=3}^{n} p_k > 1 + (n-2)\frac{1}{2} = \frac{n}{2}$. Perciò $n \geq 199$ e il valore 199 è effettivamente ottenibile con $p_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{199}$.

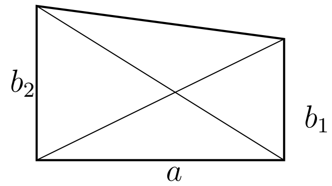
Soluzione del problema 5 $\frac{2 \cdot 45 + 1 \cdot 40 + 1 \cdot 0}{4} = 32.5$

Soluzione del problema 6 La situazione è schematizzata dalla tabella

	A	B	C	D	E
gialla					
blu	X				X
verde		X	X		X
rossa	X		X	X	

Le due scimmie con la maglietta rossa devono essere Berto ed Erto. Dunque, solo Certo o Derto possono essere la scimmia che indossa la maglietta blu. Supposto che Alberto indossi la maglietta verde, non può essere comunque vicino ad una scimmia con la maglietta blu. Dunque Derto deve indossare una maglietta verde (e Certo indossa la maglietta blu). Si noti che Alberto può indossare sia una maglietta gialla che una maglietta verde (ma il problema non richiede nulla su di essa).

Soluzione del problema 7 Siano $b_1 = 66\,\mathrm{m}$, $b_2 = 84\,\mathrm{m}$ e $a = 135\,\mathrm{m}$.



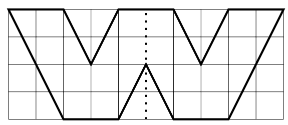
Il punto sul trapezio più lontano dal punto di incontro delle diagonali è l'intersezione della base maggiore con il lato obliquo. La distanza p tra questi si ottiene dalla similitudine dei triangoli formati con il punto di incontro delle diagonali e con una base in comune col trapezio. Visto che la diagonale maggiore è lunga $d = \sqrt{b_2^2 + a^2} = 159\,\mathrm{m}$, si ha che $p = b_2 \frac{d}{b_1+b_2}$ e la lunghezza precisa è $89,04\,\mathrm{m}$.

Soluzione del problema 8 L'area coperta dalla vernice è uguale alla superficie totale del cilindro: $2\pi(1\,\mathrm{m})^2 + \pi 2\,\mathrm{m} \cdot 6\,\mathrm{m} = 14\pi\,\mathrm{m}^2 \approx 43,98\,\mathrm{m}^2 = 4398\,\mathrm{dm}^2$

Soluzione del problema 9 Sommando le ampiezze degli angoli dei cinque triangoli formati da una coppia di punte e un vertice del pentagono all'interno della stella, si trova che la somma delle ampiezze dei cinque angoli nelle punte è $\frac{5\cdot 180 - 3\cdot 180}{2} = 180$ dato che si devono togliere gli angoli nei vertici del pentagono. Uno dei quattro uguali vale $\frac{180-12}{4} = 42°$.

Soluzione del problema 10 Il massimo si ottiene tagliando a metà sempre lo stesso lato, il minimo quando si taglia alternativamente un lato e poi l'altro. Perciò il lato lungo poteva essere $88 \cdot 2^5$ mm oppure $62 \cdot 2^3$ mm e la differenza in mmè $(88 \cdot 4 - 62) \cdot 2^3 = (352 - 62) \cdot 2^3 = 2320$.

Soluzione del problema 11 Considerata metà W si vede che sta in un rettangolo $10\,\mathrm{cm} \times 8\,\mathrm{cm}$ e l'area fuori dalla W è composta da 7 triangoli rettangoli con cateti di 4 cm e 2 cm. Perciò l'area della W è $2(80 - 7 \cdot 4)\,\mathrm{cm}^2 = 104\,\mathrm{cm}^2$.
Facendo il disegno su carta quadrettata, uno se la può cavare in fretta con il teorema di Pick:



Soluzione del problema 12 Sia $k^2 = 2^{2008} + 2^{3599} + 2^n = 2^{2008}(1 + 2^{1591}) + 2^n$. Posto $a = \frac{k}{2^{1004}}$, si ha che $2^{n-2008} = a^2 - (1 + 2^{1591})$. Perciò a è dispari, diciamo $a = 2b - 1$, e $2^{1589}(2^{n-3599} - 1) = b(b-1)$. Se b è pari, si trova $n = 5188$; il caso b dispari è impossibile.

Soluzione del problema 13 $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{7^4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{7^3} = \frac{120}{343}$

Soluzione del problema 14 Dato che $100^2 = 10000$, il numero n^2 cercato deve essere ottenuto da $n = 10a + b$ con $a \neq 0$ e b cifre. Allora $n^2 = 10(10a^2 + 2ab) + b^2$. La cifra delle decine di b^2 deve essere dispari. Allora la cifra delle unità di n^2 è 6 e b è 4 oppure 6. La cifra delle decine di n^2 deve essere 5 e la si calcola come cifra delle unità del numero $2ab + c$ dove c è la cifra delle decine di b^2, dunque $c = 1$ se $b = 4$, e $c = 3$ se $b = 6$. Per cercare il massimo n^2 di quattro cifre, si trova che $a = 8$ produce la condizione cercata per $b = 4$.

Soluzione del problema 15 I multipli di 1792 sono 1792, 3584, 5376, 7168, 8960. Perciò un numero compreso tra 1000 e 9999 che verifica le condizioni richieste deve avere, in ogni posizione, cifre diverse da quelle dei multipli di 1792:

- in prima posizione può avere soltanto 2, 4, 6, 9
- in seconda posizione può avere soltanto 0, 2, 4, 6, 8
- in terza posizione può avere soltanto 0, 1, 2, 3, 4, 5

- in quarta posizione può avere soltanto 1, 3, 5, 7, 9

Il minimo che verifica la proprietà è 2001, il massimo è 9859: la risposta è $9859 - 2001 = 7858$.

Soluzione del problema 16 Sia $A = 85\,\mathrm{m}^2$. I centri delle circonferenze sono necessariamente sulla bisettrice dei due vialetti e il raggio di una circonferenza è metà della distanza del centro dall'ingresso. Così il rapporto tra il raggio di una circonferenza e quello della successiva è $\frac{1}{3}$. L'area richiesta è $A(1 + 3^2 + 3^4) = 91A = 7735\,\mathrm{m}^2$.

Soluzione del problema 17 La situazione è sempre schematizzata dalla tabella

	A	B	C	D	E
gialla(1)					
blu (2)	X				X
verde (2)		X	X		X
rossa (3)	X		X	X	

L'odio per il rosso e quello per il verde sono indipendenti. Almeno due di queste devono essere indossate. I casi sono $\binom{4}{4} + \binom{4}{3} + \binom{4}{2} = 1 + 4 + 6 = 11$:

1. se sono A, B, D e E che indossano quei colori, il resto si completa in 2 modi

2-3. se sono A (o E), B e D, il resto si completa in 1 modo

4-5. se sono A, B (o D) e E, il resto si completa in 3 modi

5. se sono A e E, il resto si completa in 3 modi

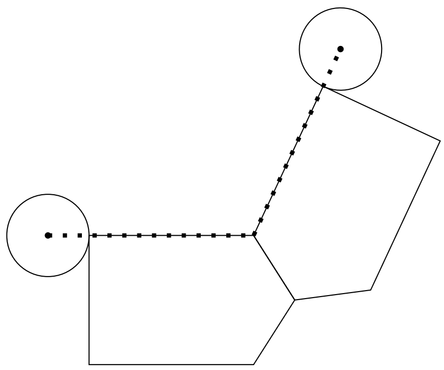
6. se sono B e D, il resto non si può completare

8-9. se sono B (o D) e E, il resto si completa in 1 modo

10-11. se sono A e B (o D), il resto si completa in 1 modo

Il totale è $2 + 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 + 0 + 2 \times 1 + 2 \times 1 = 17$

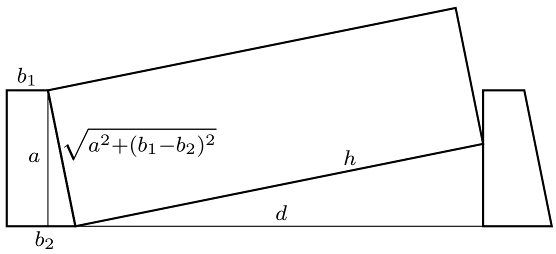
Soluzione del problema 18 Srotolando la superficie esterna della **L** si ottiene la figura



Il percorso più breve è mostrato in figura; la sua lunghezza si calcola dopo aver calcolato la distanza minima da un punto della circonferenza al taglio che è $\frac{6-2}{2}$ m. La lunghezza del percorso è $2[1\text{ m} + \frac{6-2}{2}\text{ m}] = 6\text{ m} = 6000\,\mathrm{mm}$.

Soluzione del problema 19 Sia n il numero elevato alla 14-esima potenza. Le cifre di n^{14} sono trenta. 100^{14} ha ventinove cifre e $150^{14} = (2.25)^7 \times 10^{14} > 2^7 \times 10^{14} = 1.28 \times 10^{30}$. Perciò il numero cercato è di tre cifre e la prima è 1. L'ultima cifra di n deve essere 1 o 9. La seconda può essere 1 o 6, ma 161 è maggiore di 150. Non è divisibile per 3. Di conseguenza, $n = 119$.

Soluzione del problema 20 Siano $a = 2,4\,\mathrm{m} = 240\,\mathrm{cm}$, $l = 20\,\mathrm{km}$, $h = 3\,\mathrm{m}$, $b_1 = 58\,\mathrm{cm}$ e $b_2 = 128\,\mathrm{cm}$. Il megalito caduto è almeno nella posizione in figura



Grazie alla similitudine tra i triangoli rettangoli con cateti maggiori d e a rispettivamente, la distanza d tra i due vertici di base più vicini di due mattoni è $\frac{h}{\sqrt{a^2+(b_1-b_2)^2}}a$. Il numero massimo k è tale che $k-1 < \frac{l-b_2}{d+b_2} \leq k$, cioè $\left\lceil \frac{l-b_2}{d+b_2} \right\rceil$; così $d = 288$ cm e $k = 4808$.

Soluzione del problema 21 Le entità sono 1, 2,. . . , 10, disposti in ordine crescente in senso orario nella configurazione iniziale. La prima osservazione è che possono esserci soltanto scambi digiunti, perché, se, diciamo, 1 si siede al posto di 2 e 2 al posto di 3, allora 3 è costretto a sedersi al posto di 4 e così via, riottienendo la configurazione iniziale. Quindi ci possono essere al più 5 scambi, che si determinano decidendo qual è il primo giocatore della coppia in senso orario:

0 scambi: la configurazione iniziale, da escludere

1 scambio: le possibili coppie adiacenti che si possono scambiare sono 10

2 scambi: scelto il primo scambio, in 10 modi diversi, il secondo si può scegliere tra 7 modi tra gli otto giocatori rimasti perché l'ottavo giocatore non può essere il primo di una coppia. Le scelte sono contate due volte: sono $\frac{7 \cdot 10}{2} = 35$

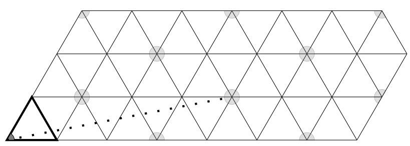
3 scambi: scelti il primo scambio in 10 modi, il secondo ed il terzo si scelgono prendendo due giocatori non adiacenti tra gli altri 7 (ancora l'ottavo è escluso); fissato il primo scambio come (1 2), se il secondo è determinato da 3, allora il terzo può essere scelto in 5 modi, e così via. Le scelte sono contate tre volte: sono $\frac{10 \cdot (5+4+3+2+1)}{3} = 50$

4 scambi: 2 persone rimangono sedute al proprio posto e sono separate da un numero pari di posti. Se 1 sta seduto al suo posto, l'altro può essere scelto in 5 modi; se 2 sta seduto, l'altro può essere scelto in 4 modi così come per 3, e così via: sono $15 + 10 = 25$.

5 scambi: sono soltanto 2 possibilità, scambiando (1 2) oppure (1 10).

Sommando le possibili configurazioni sono $10 + 35 + 50 + 25 + 2 = 122$.

Soluzione del problema 22 Per vedere come far rimbalzare la palla conviene "riflettere" il biliardo (nel disegno non sono indicate le altre buche!):



E' necessario escludere i percorsi che inizino "paralleli" ad una sponda perché la palla finirebbe in un'altra buca, è pure necessario escludere il percorso perpendicolare alla sponda opposta che manderebbe la palla in buca con un singolo rimbalzo. Uno dei percorsi più brevi si vede in figura: è lungo $\sqrt{81+3} = 2\sqrt{3}\sqrt{7} \approx 9.165$ (con i valori approssimati comunicati nel testo, il calcolo produce 9.16558036, usando con precisione superiore il calcolo produce 9.16515139: in ogni caso la risposta è 0916).

Soluzione del problema 23 La situazione è stavolta schematizzata dalla tabella

	A	B	C	D	E
gialla(1)					
blu (2)					
verde (2)					
rossa (3)					

Le possibili scelte di cinque magliette sono:

- 1 gialla, 2 tra due degli altri tre colori: le scelte possibili di colori sono 3, fissati quelli possono essere indossate in $\frac{5!}{2!2!} = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ modi.
- 1 gialla, 1 tra due altri colori, 2 nell'ultimo colore: le scelte possibili di colori sono 3, fissati quelli possono essere indossate in $\frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ modi.
- 1 gialla, 1 blu o verde, 3 rosse: le scelte possibili di colori sono 2, fissati quelli possono essere indossate in $\frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$ modi.
- nessuna gialla, 2 blu o verdi, 3 rosse: le scelte possibili di colori sono 2, fissati quelli possono essere indossate in $\frac{5!}{3!2!} = 5 \cdot 2 = 10$ modi.
- nessuna gialla, 2 tra due colori, 1 nell'ultimo colore: le scelte possibili di colori sono 3, fissati quelli possono essere indossate in $\frac{5!}{2!2!} = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ modi.
- nessuna gialla, 1 blu, 1 verde, 3 rosse: le scelte possibili di colori sono 1, fissati quelli possono essere indossate in $\frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$ modi.

In totale, le possibili scelte sono $30 \cdot 3 + 60 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 20 \cdot 1 = 440$.

Soluzione del problema 24 Supposta 6 vera, 2 e 5 sono false. Dunque una tra 3 o 4 è vera. $\lightning$
Dunque 6 è falsa e 1 è falsa. Inoltre al massimo due sono false tra 2, 3, 4, 5.
Supposte 2 e 5 false, una tra 3 o 4 è vera, cioè almeno tre sono false tra 2, 3, 4, 5. $\lightning$
Dunque una tra 2 e 5 è vera. Supposta 2 vera, 3, 4, 5 sono false. $\lightning$
Dunque, 2 è falsa, 5 è vera, così come 3 e 4.
9 è vera se e solo se 10 è falsa. Perciò 11 è falsa. Ne segue che 13 non può essere vera. Perciò 13 è falsa e 12 è vera. La situazione è la seguente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
falsa	falsa	vera	vera	vera	falsa					falsa	vera	falsa

e

- $N - 1$ è divisibile per 3
- $N + 12$ è divisibile per 7, cioè $N + 5$ è divisibile per 7
- 9 è vera se e solo se 10 è falsa.

Supposto 10 vera (e 9 falsa), 7 e 8 sono vere. Perciò $N - 9$ è una potenza di 3 e $N - 7$ è una potenza di 2. $\lightning$
Dunque 10 è falsa (e 9 vera); almeno una tra 7 e 8 è falsa. Supposto 8 vera, allora $N - 10$ è una potenza di 3 e $N - 6$ è una potenza di 2. $\lightning$
Perciò 8 è falsa.
La situazione è ora la seguente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
falsa	falsa	vera	vera	vera	falsa		falsa	vera	falsa	falsa	vera	falsa

Riassumendo, si sa che

- $N-1$ è divisibile per 3
- $N+5$ è divisibile per 7
- $N-10$ non è una potenza di 3
- N ha 7 divisori e $N-6$ è una potenza di 2,
  oppure N non ha 8 divisori e $N-5$ è una potenza di 2

Non ci sono potenze k di 2 minori di 10000 tali che $(k+6)-1=k+5$ è divisibile per 3 e $(k+6)+5=k+11$ è divisibile per 7.
Le potenze k di 2 minori di 10000 tali che $(k+5)-1=k+4$ è divisibile per 3 e $(k+5)+5=k+10$ è divisibile per 7 sono 32 e 2048. Perciò N può essere 37 oppure 2053. Visto che 27 è una potenza di 3, la risposta è 2053.